Homogena linearna diferencijalna jednačina

Doc. dr Nevena Mijajlović

Energetika i automatika, Elektronika, telekomunikacije i računarstvo; ETF

Matematika 3

Opšti oblik HLDJ

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0.$$

- Pretpostavljamo da $a_1, a_2, \ldots, a_n \in C(\mathbb{I})$.
- Tada je $\mathbb{G} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n$ - oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja ove jednačine.
- Za proizvoljnu tačku $(t_0, y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{G}$ postoji jedinstveno rješenje date jednačine $y = \varphi(t)$, koje zadovoljava uslove $y^{(i)}(t_0) = y_0^{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n$.

U vezi sa ovim zadatkom posmatraćemo operator $L : C^{(n)}(\mathbb{I}) \mapsto C(\mathbb{I})$ definisan formulom

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y$$

Teorema

Operator L je linearan.

Dokaz. Ispitaćemo sljedeća dva svojstva:
(1) Aditivnost operatora:

$$(\forall y_1 \in C^{(n)}(\mathbb{I}))(\forall y_2 \in C^n(I))L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Zaista, imamo:

$$L(y_1+y_2) = (y_1+y_2)^{(n)} + a_1(t)(y_1+y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)(y_1+y_2)$$

$$= y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + a_1(t)y_1^{(n-1)} + a_1(t)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y_1 + a_n(t)y_2$$

$$= y_1^{(n)} + a_1(t)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y_1 + y_2^{(n)} + a_1(t)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y_2$$

$$= L(y_1) + L(y_2).$$

Slično za svako $\alpha \in R$ i svako $y \in C^{(n)}(\mathbb{I})$, imamo
(2) Homogenost

$$L(\alpha y) = (\alpha y)^{(n)} + a_1(t)(\alpha y)^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)(\alpha y) =$$

$$\alpha \left(y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t) y + a_n(t) \right) = \alpha L(y).$$

Zaključujemo da je operator L linearan.

Sa $\mathbb{D}$ označimo skup svihe rješenja posmatrane homogene linearne diferenijalne jednačine. Ovaj skup možemo opisati formulom

$$\mathbb{D} = \{y \in C^{(n)}(\mathbb{I}) : L(y) = 0\}.$$

Napomena.

- Posmatrana jednačina napisana je kao da se podrazumijeva da se zapravo traži funkcija $\varphi : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ takva da je $L(\varphi) = 0$.
- Moguće je, a ponekad korisno, ovu jednačinu posmatrati u kompleksnom području, (funkcija y je oblika $y(t) = u(t) + iv(t)$, gdje su u i v realne funkcije iz $C^{(n)}(\mathbb{I})$; broj α je obilka $\alpha = \gamma + i\delta$). U tom smislu, možemo i operator L posmtrati kao operator na prostoru funkcija sa vrijednostima u skupu kompleksnih brojeva, koji ćemo i tada označavati sa $C^{(n)}(\mathbb{I})$. Ova napomena se odnosi i biće važna u još nekim našim razmatranjima koja će uslijediti.

Teorema.

Skup D je vektorski prostor nad poljem realnih (i nad poljem kompleksnih brojeva).

Dokaz. Dovoljno je dokazati sljedeća svojstva:
(1) Iz Svojstva aditivnosti operatora L slijedi

$$(\forall y_1 \in \mathbb{D})(\forall y_2 \in \mathbb{D}) \quad (y_1 + y_2) \in \mathbb{D};$$

(2) Slično iz svojstva homogenosti operatora L slijedi

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ili } \alpha \in \mathbb{C})(\forall y \in \mathbb{D}) \quad \alpha y \in \mathbb{D}.$$

To znači da je $\mathbb{D}$ vektorski potprostor vektorskog prostora $C^{(n)}$, čime je teorema dokazana.

Jednostavno je uočiti da važi sljedeće tvrdjenje.

Posljedica

Ako su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ $(\varphi = \varphi_i(t), i = 1, 2, \ldots, k)$ rješenja homogene linerane diferencijalne jednačine, a $C_1, C_2, \ldots, C_k$ brojevi, tada je svaka linearna kombinacija $\varphi = c_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_k\varphi_k$ ovih funkcija rješenje iste jednačine.

- Utvrdili smo da je D vektorski prostor.
- Prirodno se postvljaju se sljedeća pitanja: Kolika je dimenzija protora D, i šta je njegova baza?
- Prije nego što damo odgovore na postavljena pitanja, uvešćemo pojmove linearne nezavisnosti i linearne zavisnosti skupa funkcija.

Definicija

Funkcije $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), t \in I$ *su linearno nezavisne na intervalu* I *ako iz jednakosti linearne kombinacije* $(\forall t \in I)\alpha_1\varphi(t) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(t) = 0$ *slijedi* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

Funkcije koje nisu linearno nezavisne su *linearno zavisne*.

Primjer. (a) Funkcije $\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_3(t) = t^2$ su linearno nezavisne na svakom intervalu $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, jer iz jednakosti

$$(\forall t \in \mathbb{I})\, \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 = 0 \text{ slijedi } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

(b) Funkcije $\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = \sin^2 t, \varphi_3(t) = \cos^2 t$ su linearno zavisne na $\mathbb{R}$, jer je

$$(-1) \cdot 1 + 1 \cdot \sin^2 t + 1 \cdot \cos^2 t = 0,$$

tj. $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$ - (čak svi) različiti od nule.

Za n rješenja $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ homogene linearne diferencijalne jednačine može se utvrditi da li su linearno zavisna ili su linerno nezavisna pomoću **determinante Vronskog** $W(t)$ koja se definiše na sljedeći način:

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(t) = W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Determinanta Vronskog se veže za neka rješenja homogene linearne diferencjalne jednačine. To se naglšava u oznaci $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(t)$. Medjutim, kada je iz konteksta jasno o kojim s rješenjima radi, dovoljno je koristiti oznaku $W(t)$.

Teorema. Neka su $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, definisana na intervalu $\mathbb{I}$ i $W(t)$ odgovarajuća determinanta Vronskog. Tada su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

(1) $(\forall t \in I) \;\; W(t) = 0;$

(2) $(\exists t_0 \in I) \;\; W(t_0) = 0;$

(3) Rješenja $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ su linearno zavisna.

Teorema. Neka su $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ rješenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, definisana na intervalu $\mathbb{I}$ i $W(t)$ odgovarajuća determinanta Vronskog. Tada su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

(1) $(\forall t \in I) \;\; W(t) \neq 0;$

(2) $(\exists t_0 \in I) \;\; W(t_0) \neq 0;$

(3) Rješenja $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ su linearno nezavisna.

Teorema

Prozvoljnih n linearno nezavisnih rješenja HLDJ n-tog reda obrazuju bazu prostora $\mathbb{D}$ svih rješenja te jednačine.

Bazu prostora rješenja $\mathbb{D}$ date jednačine nazivamo **fundamentalnim skupom rješenja** te jednačine.

Ako je $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ fundamentalni skup rješenja jednačine, tada je formulom

$$y = C_1\varphi_1(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t)$$

dato opšte rješenje te jednačine.

Primjer: Sastaviti linearnu diferencijalnu jednačinu čiji je fundamentalni skup rješenja $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in \mathbb{I}$.

Neka je $y = y(t)$ rješenje tražene diferencijalne jednačine. Tada su funkcije $y, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno zavisne, pa je $W(t) = W_{y,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n}(t) = 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} y & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ y' & \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Primjer: Diferencijalna jednačina $y'' + (\text{tg } t - 2\text{ctg } t)y' = 0$ ima partikularna rješenja $y_1 = \sin t - \frac{1}{3}\sin 3t$ i $y_2 = \sin^3 t$. Da li su ona linearno nezavisna?

Da bi smo provjerili linearnu nezavisnost rješenja y_1 i y_2 izračunajmu determinantu Vronskog:

$$W_{y_1,y_2}(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Zamjenjujući y_1 i y_2 dobijamo

$$W_{y_1,y_2}(t) = \sin^2 t(2\sin t\cos t - \sin 3t\cos t + \cos 3t\sin t).$$

Koristeći identitet $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$ dobijamo

$$W = \sin^2 t\left(\sin 2t - \frac{1}{2}(\sin 2t + \sin 4t) + \frac{1}{2}(\sin(-2t) + \sin 4t)\right) = 0.$$

Rješenja y_1 i y_2 su linearno zavisna.

Primjer: Pokazati da su rješenja $y_1 = e^{-t}$ i $y_2 = e^{t^2}$ jednačine

$$(2t+1)y'' - (4t^2+1)y' - (4t^2+2t+2)y = 0$$

linearno nezavisna.

Napišimo jednačinu u obliku

$$y'' - \frac{4t^2+1}{2t+1}y' - \frac{4t^2+2t+2}{2t+1}y = 0,$$

odakle zaključujemo da je $t = -\frac{1}{2}$ singularna tačka.

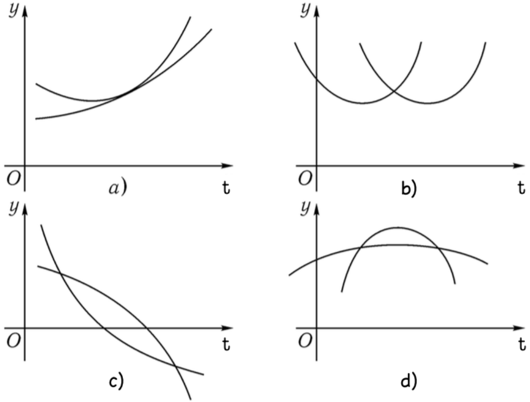
$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t^2} \\ -e^{-t} & 2te^{t^2} \end{vmatrix} = e^{t^2-t}(2t+1).$$

Dakle, $W(y_1, y_2) = 0$ za $t = -\frac{1}{2}$. Ovu tačku izostavljamo jer je singularna. Za sve druge tačke $W(y_1, y_2) \neq 0$, pa su y_1 i y_2 linerano nezavisna rješenja.

Primjer. Mogu li grafici 2 rješenja jednačine

$$y'' + q(t)y = 0, \quad q \in C(\mathbb{R}),$$

biti rasporedjeni kao na slikama:



Homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

To je jednačina oblika

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

gdje $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

- Oblast egzistencije i jedinstvenosti rješenja ove jednačine je $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.
- Prirodno se postavlja pitanje: kako naći opšte rješenje ove jednačine, koja je relativno jednostavna u odnosu na opšti slučaj?
- Na osnovu ranijih razmatranja, treba naći n linearno nezavisnih rješenja.

Ojlerov metod

Rješenje tražimo u obliku $y = e^{\lambda t}$, pri čemu treba odrediti broj λ. Tada je $y' = \lambda e^{\lambda t}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$. Uvrstimo sve to u jednačinu (1). Dobijamo

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda t} + \cdots + a_n \cdot e^{\lambda t} = 0,$$

odakle (zbog $e^{\lambda t} \neq 0$) slijedi

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots a_n = 0.$$

Polinom $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots a_n$ se naziva *karakterističnim polinomom* diferencijalne jednačine (1), a jednačina $P(\lambda) = 0$ karakterističnom jednačinom DJ (1.)

Dakle, $y = e^{\lambda t}$ je rješenje jednačine (1) ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma date jednačine (1).

Pitanje mogućnosti i načina rješavanja jednačina ovog tipa postaje,sa stanovništva mogućnosti i načina rješavanja jednačine (1), veoma važno. Sljedeća teorema govori o rješivosti jednačina tipa $P(\lambda) = 0$.

Teorema (osnovna teorema algebre)

Svaki polinom $n-$tog stepena sa koeficijentima iz polja kompleksnih brojeva ima u polju kompleksnih brojeva n korijena.

Tako, na primjer, kvadratna jednačina ima dva korijena, koji ne moraju biti realni brojevi, jednačina trećeg stepena ima tri rješenja (neka od njih se mogu poklopiti) i neki od njih ne moraju biti realni brojevi itd.

Uopšte, iako su koeficijenti polinoma realni brojevi, neki od korijena tog polinoma se mogu poklopiti. Pretpostavimo da uspijevamo (na neki način) odrediti korijene polinoma $P(\lambda)$. Razlikujemo sljedeće mogućnosti:

I slučaj

Svi korijeni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ polinoma $P(\lambda)$ su realni i različiti.

Svakom od tih korijena pridružujemo po jednu funkciju:

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & \to & \varphi_1(t) & = & e^{\lambda_1 t}, \\ \lambda_2 & \to & \varphi_2(t) & = & e^{\lambda_2 t}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \to & \varphi_n(t) & = & e^{\lambda_n t} \end{array}$$

Funkcije $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ su rješenja jednačine (1). Ima ih tačno n, i potrebno je ispitati da li su ova rješenja linearno nezavisna.

U tom cilju računamo determinantu Vronskog.

$$
\begin{aligned}
W_{\varphi_1,\dots,\varphi_n}(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{(n-1)} e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} \\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{(n-1)} & \lambda_2^{(n-1)} & \dots & \lambda_n^{(n-1)} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Gornja determinanta je poznata Van der Mondova determinanta, pa je

$$
W(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)t} \prod_{1\le j<i\le n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0.
$$

Dakle, rješenja $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ su linearno nezavisna, pa je opšte rješenje jednačine (1) u ovom slučaju

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

gdje su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

II slučaj

Svi korijeni polinoma $P(\lambda)$ su i dalje realni, ali neki od njih su višestruki.

Posmtrajmo slučaj kada je diferencijalna jednačina drugog reda:

$$y" + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Pretpostavimo da je λ_1 dvostruki korijen jednačine $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Tada je jedno rješenje date DJ $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, ali nama su potrebna dva linearno nezavisna rješenja. Ako bismo imali i rješenje $\lambda \neq \lambda_1$, tada bismo imali $\varphi_2(t) = e^{\lambda t}$ drugo rješenje date diferencijalne jednačine.
Slijedi da je tada

$$\varphi_{1,2}(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda - \lambda_1}.$$

takođe rješenje ove jednčine.

Pri tome je

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{e^{\lambda t}-e^{\lambda_1 t}}{\lambda-\lambda_1}=\lim_{\lambda\to\lambda_1} e^{\lambda_1 t}\frac{e^{(\lambda-\lambda_1)t}-1}{(\lambda-\lambda_1)t}t=$$

$$=e^{\lambda_1 t}t\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{e^{(\lambda-\lambda_1)t}-1}{(\lambda-\lambda_1)t}=te^{\lambda_1 t}.$$

Naslućujemo da bi $\varphi_2(t)=te^{\lambda t}$ moglo biti drugo rješenje date jednačine. Provjeramo da li je to tačno? Imamo da je

$$\varphi_2'(t)=e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 te^{\lambda_1 t},$$

$$\varphi_2''(t)=\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 te^{\lambda_1 t}+\lambda_1^2 te^{\lambda_1 t}.$$

Uvrstimo to u datu diferencijalnu jednačinu. Dobijamo

$$2\lambda_1 e^{\lambda_1 t}+\lambda_1^2 te^{\lambda_1 t}+a_1(e^{\lambda_1 t}+\lambda_1 te^{\lambda_1 t})+a_2 te^{\lambda_1 t}=0.$$

Poslije dijeljenja sa $e^{\lambda_1 t} \neq 0$ dobijamo

$$2\lambda + \lambda^2 + a_1 + \lambda_1 a_1 t + a_2 t = 0,$$

odnosno

$$2\lambda_1 + a_1 + t(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) = 0.$$

Primjetimo da ako karakteristični polinom ove jednačine označimo sa $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$. Zbog toga prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$P'(\lambda_1) + tP(\lambda_1) = 0.$$

Pri tome je λ_1 korijen ovog polinoma (kvadratnog trinoma) pa je dakle $P(\lambda_1) = 0, P'(\lambda_1) = 0$. To znači da je $\varphi_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ rješenje date diferencijalne jednačine.

Determinanta Vronskog za ovaj sistem funkcija je

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & (1+\lambda_1 t)e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\lambda_1 t} \begin{vmatrix} 1 & t \\ \lambda_1 & 1+\lambda_1 \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 t} \neq 0.$$

Dakle, ova rješenja su linerano nezavisna, pa je opšte rješenje posmatrane diferencijalne jednačine

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 te^{\lambda_1 t}.$$

Kada rješavamo HLDJ $n-$tog reda sa konstantnim koeficijentima, tada je odgovarajući karakteristični polinom $P(\lambda)$ polinom $n-$og stepena. Za sada pretpostavljamo da su njegovi korijeni realni brojevi. Neki od tih korijena mogu biti višestruki.

Podsjećanje. Broj λ_0 je korijen višestrukosti $r,$ polinoma $P(\lambda)$, ako je

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r Q(\lambda), \text{ pri čemu je } Q(\lambda_0) \neq 0.$$

Ovaj uslov možemo pisati i na sljedeći način:

$$P(\lambda_0) = 0, \ \ldots, \ P^{(r-1)}(\lambda_0) = 0, \ \ P^{(r)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Ako je $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ korijen višestrukosti r karakterističnog polinoma HLDJ (1), tada tom korijenu odgovaraju sljedeća rješenja jednačine (1).

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_0 t}, \varphi_2(t) = te^{\lambda_0 t}, \ldots, \varphi_r(t) = t^{r-1} e^{\lambda_0 t}.$$

- Ako je pri tome $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^r Q(\lambda)$, gdje je $Q(\lambda)$ polinom stepena $n - r$, tada se pored prethodno opisanih r rješenja jednačine (1), još $n - r$ rješenja dobija odredjivanjem $n - r$ korijena polinoma $Q(\lambda)$, na način opisan u **I** i **II**.
- Važno je još napomenuti da se na ovaj način dobijaju linearno nezavisna rješenja, kojih ima dovoljno da obrazuju bazu prostora rješenja HLDJ (1).

III slučaj

Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ korijen karakterističnog polinoma diferencijalne jednačine (2), čiji su koeficijenti realni brojevi, tada je i $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, korijen istog polinoma.

Ovom paru (konjugovano kompleksnih) korijena odgovaraju rješenja

$$\xi_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

$$\xi_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t).$$

ali to su funkcije čije vrijednosti ne pripadaju skupu $\mathbb{R}$.
Nova dva realna rješenja možemo dobiti na sljedeći način:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(\xi_1(t) + \xi_2(t)) = e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$\varphi_2(t) = \xi_1(t) - i\xi_2(t) = \frac{1}{2i}(\xi_1(t) - \xi_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t, .$$

Ova dva rješenja će biti dio fundamentalnog skupa rješenja jednačine (1).
Ako je neki broj $\alpha + i\beta$ višestruki korijen (strukosti veće od 1) karakterističnog polinoma HLDJ, tada treba primijeniti postupak objašnjen u tački II.

Primjer 1. Riješićemo jednačinu $y" + y' - 2y = 0$.

Karakteristični polinom ove jednačine je kvadratni trinom $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$, a njegovi korijeni (rješenja kvadratne jednačine $P(\lambda) = 0$) su $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$.
Fundamentalni skup rješenja ove jednačine čine rješenja $\varphi_1(t) = e^{-2t}$ i $\varphi_2(t) = e^t$, a opšte rješenje je dato formulom

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

Primjer 2. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$ je HLDJ čiji je karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 3)^2$.
Korijeni polinoma $P(\lambda)$ su $\lambda_1 = 0$-(to je trostruki korijen i njemu odgovaraju rješenja date jednačine
$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_3(t) = t^2$.) i $\lambda_2 = 3$ - (to je dvostruki korijen kojem odgovaraju rješenja $\varphi_4(t) = e^{3t}, \varphi_5(t) = te^{3t}$.
Ovih pet rješenja čine fundanentalni skup rješena date HLDJ, a njeno opšte rješenje je

$$y = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 e^{3t} + C_5 t e^{3t}.$$

Primjer 3. Data je HLDJ $y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0$ koju treba riješiti.
Karakteristčni polinom ove jednačine je

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = \lambda(\lambda^2 + 4)^2,$$

a njegovi korijeni su $\lambda_1 = 0$, (ovom korijenu odgovara rješenje $\varphi_1(t) = 1$)) i par konjugovano kompleksnih brojeva $\lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$ (to su dvostruki korijeni) kojem odgovaraju parovi rješenja date HLDJ $\varphi_2(t) = \cos t, \varphi_3(t) = \sin 3t$ i $\varphi_4(t) = t\cos 3t, \varphi_5(t) = t\sin 3t$.
Ova rješenja čine fundamentalni skup rješenja date jednačine, a njeno opšte rješenja je

$$y = C_1 + C_2\cos 3t + C_3\sin 3t + C_4 t\cos 3t + C_5\sin 3t.$$

Primjer 4. Treba napisati HLDJ sa konstantnim koeficijentima, što je moguće manjeg reda, čija su rješenja

$$\varphi(t) = t\sin t, \varphi_2(t) = te^t \cos t.$$

Zajedno sa ovim rješenjima, i funkcije $y = \sin t, y = \cos t$, $y = t\cos t, y = e^t \cos t$, su rješenja te jednačine. Odavde (zbog toga što su rješenja $y = \sin t, y = \cos t, y = t\sin t, y = t\cos t$) slijedi da karakteristiňi polinom te jednačine mora imati dvostruke korijene $\lambda = i$ i $\lambda = -i$. Dalje, zbog toga što su $y = te^t \cos t, y = te^t \sin t, y = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ rješenja slijedi da su $\lambda = 1 \pm i$ dva dvostruka korijena karakterističnog polinoma.

Slijedi, korijeni karakterističnog polinoma su $i, -i, 1+i, 1-i$ i svaki od njih je dvostruki korijen, pa je

$$P(\lambda) = [(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - (1-i))(\lambda - (1+i)]^2 =$$

$$\left[(\lambda^2 + 1)((\lambda - 1)^2 + 1)\right]^2 =$$

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1)(\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 + 4\lambda^2 - 4\lambda^3 - 8\lambda) =$$

$$P(\lambda) = \lambda^8 - 4\lambda^7 + 10\lambda^6 - 16\lambda^5 + 21\lambda^4 - 20\lambda^3 + 16\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

Dakle, tražena diferencijalna jednačina glasi:

$$y^{(8)} - 4y^{(7)} + 10y^{(6)} - 16y^{(5)} + 21y^{(4)} - 20y^{(3)} + 16y'' - 8y' + 4y = 0.$$

(b) Ako se pak traži bilo koja homogena hlinearna diferencijalna jednačina, tada tu jednačinu možemo dobiti iz uslova: Data rješenja y_1, y_2 i proizvoljno treće rješenje y su linaerno zavisna, tj. mora biti

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} t\sin t & te^t\cos t & y \\ \sin t + t\cos t & e^t\cos t + te^t\cos t - te^t\sin t & y' \\ \cos t + \cos t - t\sin t & \dots & \end{vmatrix} = 0,$$

Ra vcunajući determinante dobijamo jednačinu drugog reda oblika

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0.$$